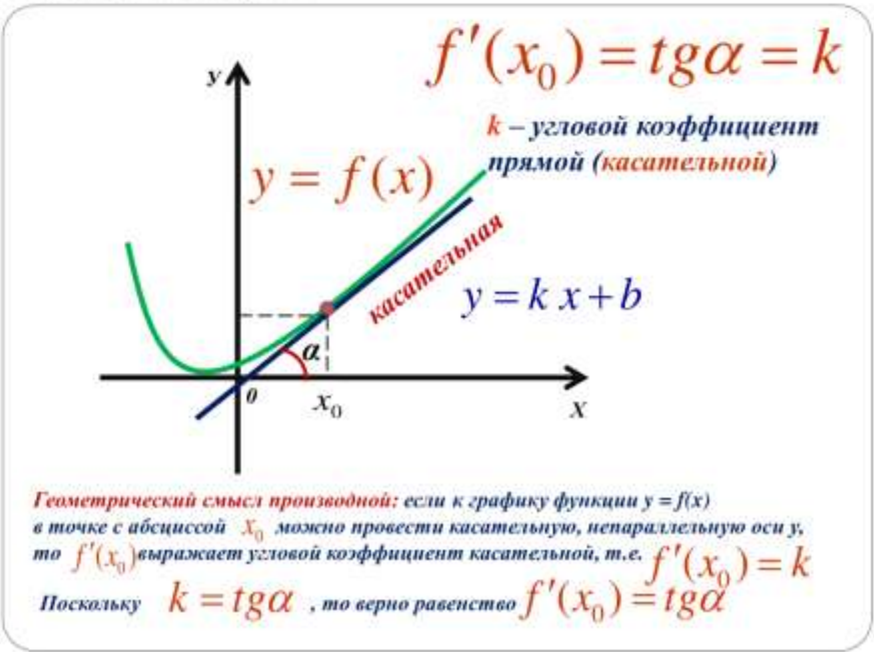
Самостоятельная работа на тему: Геометрический смысл производной

Цель: Иметь понятие о геометрическом смысле производной. Уметь находить тангенс угла наклона касательной к оси ох.

Теоретический материал



Решить самостоятельно:

Вариант 1

1. Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$в точке с абсциссой x_0.
   1.1. $f(x) = 3x^2$, $\quad x_0 = 1$.
   1.2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\quad x_0 = 2$.
   1.3. $f(x) = 4\sqrt{x}$, $\quad x_0 = 4$.
   1.4. $f(x) = 5cosx$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$.
   1.5. $f(x) = sin3x$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{12}$.
2. Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$в точке с абсциссой x_0.
   2.1. $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 1$, $\quad x_0 = 0$.
   2.2. $f(x) = x^3 - 2x$, $\quad x_0 = 2$.

1. Уравнение касательной

Алгоритм нахождения уравнения касательной:

1. Найти производную функции, $f'(x)$.
2. Найти значение производной функции в данной точке, $f'(x_0)$.
3. Найти значение функции в данной точке, $f(x_0)$.
4. Составить уравнение касательной, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Образец решения 1:

Найти значение производной функции в точке x_0, это значит найти $f'(x_0)$.

Для этого надо:

1. Найти производную функции.
2. В полученную производную подставить значение точки x_0.
3. Записать ответ (в результате получится число).

Пример: Найти значение производной функции $y = x^2 - 2x$ в точке $x_0 = 3$.

1. Найти производную функции. $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$.
2. В полученную производную подставить значение точки x_0. $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$;
3. Записать ответ. $f'(3) = 4$;

Образец решения 2:

Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение:

1. Найти производную функции $y = x^2 - 3x + 5$.

   $f'(x) = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3$.

2. Найти значение производной функции в точке $x_0 = 2$.

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1; \quad f'(2) = 1$

3. Найти значение функции в данной в точке $x_0 = 2$.

$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 4 - 6 + 5 = 3; \quad f(2) = 3.$

4. Составить уравнение касательной, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$y = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = x + 1.$

$y = x + 1$ – уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$ точке с абсциссой $x_0 = 2$.

5. Ответ: $y = x + 1$.

Задания

1. Найти значение производной функции в точке x_0

Первый уровень

4.1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

4.2. $f(x) = x^2 + 4x$, $x_0 = 1$

4.3. $f(x) = x^3 - 2x - 6$, $x_0 = -1$

4.5. $f(x) = -x^2 + 4x - 8$, $x_0 = -2$.

4.6. $f(x) = -x^3 + 5x - 5$, $x_0 = -2$.

4.7. $f(x) = x^3 + 5x + 5$, $x_0 = 3$.

Второй уровень

4.6. $f(x) = 2\sqrt{x} + 5$, $x_0 = 4$

4.7. $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$, $x_0 = 3$.

4.8. $f(x) = 2\cos x + 18$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.9. $f(x) = -\cos x + 2$ $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4.10. $f(x) = \mathrm{tg}\, x + 4$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Первый уровень

4.14. $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$

4.1. $f(x) = x^2 - 3x$, $x_0 = -1$

4.16. $f(x) = x^3 + 3x - 5$, $x_0 = 0$

4.17. $f(x) = -x^2 - 4x + 2$, $x_0 = -1$.

4.18. $f(x) = -x^2 + 6x + 8$, $x_0 = -2$.

4.19. $f(x) = x^3 + 5x + 5$, $x_0 = -1$.

4.20. $f(x) = 2\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.21. $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $x_0 = \pi$.

4.22. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$, $x_0 = -1$

4.23. $f(x) = 3 \ln x$, $x_0 = 1$

Второй уровень

4.24 $f(x)=1-\sin 2x$, $x_0 = 0$.

4. 25 $f(x)= \frac{1}{x+3}$, $x_0 = 2$.

4.26 $f(x)= \frac{3x-2}{3-x}$, $x_0 = 2$.

4.27 $f(x)= \frac{2x-5}{5-x}$, $x_0 = 4$.

4.28. $f(x)= \sqrt{7-2x}$, $x_0 = 3$.

4.29. $f(x)= 2\sqrt{3x-5}$, $x_0 = 2$.

4.30. $f(x)= \cos \frac{x}{3}$, $x_0 = 0$.

4.31. $f(x)= \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4.32. $f(x)= ctg\, 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4.33. $f(x)= x \cdot \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Образец решения 3:

Найти тангенс угла наклона касательной, проходящей через точку абсцисса $x = -2$ графика функции $y = x^3 - 7x$.

Решение:

1. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной в точке, т.е.

$tg\,\alpha = f'(x_0)$.

2. Найдем производную функции $y = x^3 - 11x$.

$f'(x) = (x^3 -7x)' = 3x^2 - 11$.

3. Найти значение производной функции в точке $x_0 = -2$

$f'(-2) = 3 \cdot(-2)^2 - 11 = 3 \cdot 4 - 11 = 1$.

4. Найдем тангенс угла наклона касательной.

$tg\,\alpha = f'(-2) = 1$.

5. Ответ: $tg\,\alpha = 1$.

Образец решения 4:

Какой угол образует с положительным направлением оси OX касательная к графику функции $y = 4 + x^2$, в точке $x_0 = 0,5$.

Решение:

1. Найти производную данной функции.

$f'(x) = (4 + x^2)' = 2x$.

2. Найти значение производной функции в точке $x_0 = 0,5$.

$f'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1$.

3. Найдем тангенс угла наклона касательной.

$tg\ \alpha = f'(0,5) = 1$.

4. Определим угол (острый или тупой) и его величину.

$tg\ \alpha = 1$, $1 > 0$, значит угол острый.

По таблице тригонометрических значений имеем, $tg\ \alpha = 1$, при $\alpha = 45^0$.

5. Ответ: $\alpha = 45^0$.

3. Определите, какой угол образует с осью OX касательная, проведенная к графику функции y = f (x) в точке с абсциссой x_0.

Первый уровень

Найти тангенс угла между касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и осью OX.

1. $f(x) = x^3 + 2$, $x_0 = 1$
1. $f(x) = x^4 - 4x$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = -x^5 - 2x^2 + 2$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = 3\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

4. $f(x) = 3 + \cos x$, $x_0 = \pi$
5. $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$.

6. $y = 3 + 2x - x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Второй уровень

Найти тангенс угла между касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и осью OX.

1. $f(x) = x^6 - 4x$, $x_0 = -1$
2. $f(x) = -x^6 + 2x$, $x_0 = \frac{1}{4}$
3. $f(x) = -x^6 + 3x^2 + 5$, $x_0 = -\frac{1}{2}$
4. $f(x) = \sqrt{x} + 2x$, $x_0 = 4$.
5. $f(x) = \frac{25}{x} + 5$, $x_0 = \frac{5}{4}$
6. $f(x) = 3\operatorname{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
7. $f(x) = 3\operatorname{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Образец решения 5:

Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - \sqrt{3}x$, если угол $\alpha = 60^0$.

Решение:

1. Определим значение производной в данной точке, через тангенс угла.
2. $\operatorname{tg} 60^0 = 3\sqrt{3}$, т.к. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, то $f'(x_0) = 3\sqrt{3}$
3. Найти производную данной функции.

$f'(x) = (2x^2 - \sqrt{3}x)' = 4x - \sqrt{3}$.

4. Приравняем производную к $f'(x)$ и решим уравнение и найдем x - это и будет x_0

$4x - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$4x = 4\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$, получили $x_0 == \sqrt{3}$

5. Найти значение функции в данной в точке $x_0 = \sqrt{3}$.

$f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}^2 - \sqrt{3}\sqrt{3} = 3$; $f(\sqrt{3}) = 3$.

6. Составим уравнение касательной.

7. $y = 3\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3 = 3\sqrt{3}x - 9 + 3 = 3\sqrt{3}x - 6$.

8. Ответ: $y = 3\sqrt{3}x - 6$.

Образец решения 6:

Найти угол между осью ОУ и касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение:

1. Найти производную функции $y = \cos x$.

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

2. Найти значение производной в точке $x_0 = 0$.

$f'(0) = -\sin 0 = 0$

3. Выписать $tg\lambda = f'(x_0)$

$tg\lambda = f'(x_0) = 0$, получили $tg\lambda = 0$, значит $\lambda = 0^0$

Получили, что угол между касательной и осью ОХ равен 0^0, а угол между осями координат равен 90^0.

4. Вычислим угол между осью ОУ и касательной.

Угол между осью ОУ и касательной равен 90^0.

Ответ: 90^0.

4. Определите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции образует с положительным направлением оси абсцисс угол α

Первый уровень

1. f (x) = $x^2 - 3x + 19$, $\alpha = 45^0$
2. f (x) = $x^2 + 2x - 5$, $\alpha = 30^0$

Второй уровень

3. f (x) = $\frac{4}{x+2}$, $\alpha = 45^0$
4. f (x) = $\frac{4}{x+2}$, $\alpha = 135^0$
5. f (x) = $2\sqrt{2x-4}$, $\alpha = 60^0$
6. f (x) = sin $(4x - \frac{\pi}{3})$, $\alpha = 60^0$

5. Составить уравнение касательной к графику функции, которая образует с осью OX заданный угол α

7. f (x) = $\frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3x},$, $\alpha = 60^0$
8. f (x) = $\frac{4}{\sqrt{3}}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x^3$, $\alpha = 30^0$